



گزینه ۳

۱

گام اول: طول مسیر بین دو شهر را ℓ در نظر می‌گیریم. اگر مدت‌زمان رسیدن متحرک A به مقصد که تندی آن کمتر از متحرک B است را t در نظر بگیریم مدت‌زمان رسیدن متحرک B به مقصد $(t - ۸)$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} \ell = v_A t_A \Rightarrow \ell = v_A t \\ \ell = v_B t_B \Rightarrow \ell = \frac{3}{4} v_A (t - ۸) \end{cases} \Rightarrow v_A t = \frac{3}{4} v_A (t - ۸) \Rightarrow t = ۲۴ \text{ s}$$

$$\Rightarrow \ell = v_A \times ۲۴$$

گام دوم: هنگامی که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، مجموع مسافت‌هایی که دو متحرک در زمان t' طی می‌کنند برابر ℓ است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\ell_A + \ell_B = \ell \Rightarrow v_A t' + v_B t' = \ell$$

$$\Rightarrow v_A t' + \frac{3}{4} v_A t' = v_A \times ۲۴ \Rightarrow \frac{5}{4} t' = ۲۴ \Rightarrow t' = ۹/۶ \text{ s}$$

از نمودارهای $x - t$ دو متحرک مشاهده می‌شود تقعر نمودار $x - t$ متحرک A روبه پایین است لذا شتاب حرکت آن منفی است و نیز تقعر منحنی $x - t$ متحرک B روبه بالا است در نتیجه شتاب آن مثبت است:

$$a_A = -a, \quad a_B = a$$

همچنین باتوجه به اینکه شیب خط مماس بر منحنی $x - t$ در لحظه $t = 0$ برای متحرک A مثبت و برای متحرک B منفی است؛ بنابراین سرعت اولیه متحرک A مثبت ($v_{0A} > 0$) و سرعت اولیه متحرک B منفی ($v_{0B} < 0$) است. حال باتوجه به روابط کلی معادلات مکان-زمان و سرعت-زمان در حرکت با شتاب ثابت، معادلات حرکت این دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = -\frac{1}{2}at^2 + v_{0A}t - 8 \\ x_B = \frac{1}{2}at^2 - v_{0B}t + 2 \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_A = -at + v_{0A} \\ v_B = at - v_{0B} \end{cases}$$

در لحظه $t = 1s$ نمودارهای مکان-زمان دو متحرک بر هم مماس شده‌اند بنابراین در لحظه $t = 1s$ مکان‌ها و سرعت‌های دو متحرک باهم برابر هستند.

$$t = 1s \text{ در لحظه } : \begin{cases} x_A = x_B \Rightarrow -\frac{1}{2}a + v_{0A} - 8 = \frac{1}{2}a - v_{0B} + 2 \Rightarrow a = v_{0A} + v_{0B} - 10 & (I) \\ v_A = v_B \Rightarrow -a + v_{0A} = a - v_{0B} \Rightarrow 2a = v_{0A} + v_{0B} & (II) \end{cases}$$

$$(I), (II) \Rightarrow a = 2a - 10 \Rightarrow a = 10m/s^2$$

رد گزینه ۱: نمودار پیوستگی ندارد.

رد گزینه ۲: شیب در نمودار مکان - زمان معرف سرعت متحرک است. در نمودار این گزینه ناحیه‌ای دیده می‌شود که شیب به بینهایت میل می‌کند که این در واقعیت ممکن نیست.

رد گزینه ۴: در این نمودار دو ایراد دیده می‌شود؛ اول اینکه در بعضی از لحظه‌ها، در یک لحظه متحرک در دو مکان مجزا دیده می‌شود. دوم اینکه طبق این نمودار، زمان می‌تواند به عقب بازگردد که درواقع چنین چیزی ممکن نیست.

ابتدا شیب خط مماس بر نمودار در $t = ۶$ s که برابر با سرعت متحرک در $t = ۶$ s است را به دست می‌آوریم.

$$v_{t=۶s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۱۲ - ۰}{۶ - ۳} = ۴ \text{ m/s}$$

معادله خط مماس بر منحنی را می‌نویسیم. با استفاده از این معادله و باتوجه به این که خط نمودار را در $t = ۲$ s قطع می‌کند. مکان متحرک در $t = ۲$ s را به دست می‌آوریم.

$$\text{معادله خط مماس} = ۴t - ۱۲ \xrightarrow{t=۲s} x_{۲s} = ۴(۲) - ۱۲ = -۴ \text{ m}$$

باتوجه به $x_۰ = ۱۲ \text{ m}$ و $x_{۲s} = -۴ \text{ m}$ ، معادله مکان - زمان متحرک در ۳ ثانیه نخست را می‌نویسیم و مکان متحرک در $t = ۱$ s را به دست می‌آوریم:

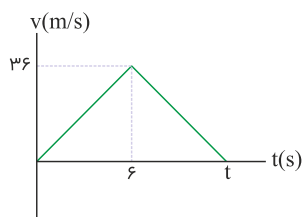
$$v_{av(۰,۲s)} = v = \frac{-۴ - ۱۲}{۲ - ۰} = -۸ \text{ m/s}$$

$$x = vt + x_۰ = -۸t + ۱۲ \Rightarrow x_{۱s} = -۸(۱) + ۱۲ = ۴ \text{ m}$$

حالا نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av(۱s,۶s)}}{v_{t=۶s}} = \frac{\frac{x_{۶s} - x_{۱s}}{۶ - ۱}}{۴} = \frac{\frac{۱۲ - ۴}{۵}}{۴} = ۰/۴$$

برای حل مسئله نمودار $v - t$ حرکت را رسم می‌کنیم.



در ۶ ثانیه اول:

$$v = at + v_0$$

$$v = 6 \times 6 + 0 = 36 \text{ m/s}$$

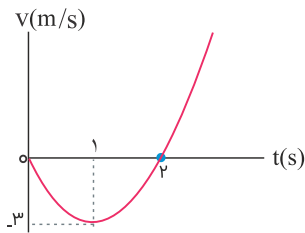
هنگامی که حرکت کندشونده است، زمان و شتاب را نداریم اما سرعت به صفر می‌رسد. جابه‌جایی را به کمک مساحت زیر نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$S = \Delta x = \frac{1}{2} \times 36 \times t = 18t$$

حالا سرعت متوسط را به دست می‌آوریم:

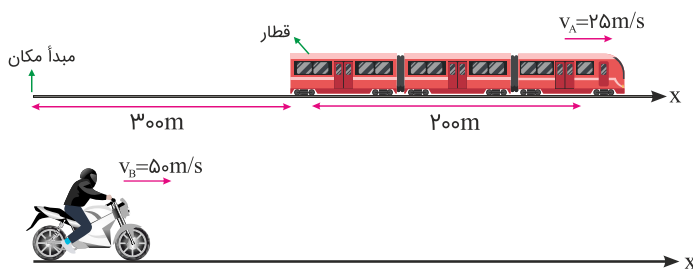
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{18t}{t} = 18 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت- زمان متحرک مطابق شکل است. باتوجه به نمودار متحرک ۲ ثانیه خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. $(0 \leq t \leq 2s)$



تذکر: منفی بودن سرعت یعنی جهت حرکت متحرک خلاف جهت محور مکان است.

باتوجه به شکل زیر، معادلات مکان- زمان را برای قطار و موتورسوار می‌نویسیم:



فقط دقت کنید که معادله مکان- زمان قطار را برای ابتدای قطار می‌نویسیم چراکه لحظه سبقت گرفتن موتورسوار از قطار، هنگامی است که موتورسوار به ابتدای قطار می‌رسد. با فرض اینکه مکان فعلی موتورسوار مبدأ مکان باشد، داریم:

$$x_A = 25t + (300 + 200) \Rightarrow x_A = 25t + 500$$

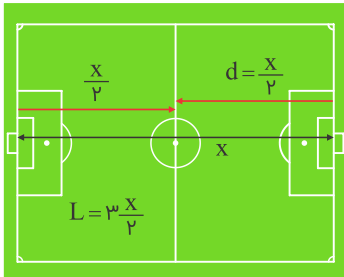
$$x_B = 50t$$

بنابراین لحظه رسیدن موتورسوار به ابتدای قطار و سبقت گرفتن آن برابر است با:

$$x_A = x_B$$

$$\Rightarrow 25t + 500 = 50t \Rightarrow 25t = 500 \Rightarrow t = 20s$$

حل این مسئله مستقل از طول زمین فوتبال است. فرض کنیم طول زمین فوتبال x است. در این صورت مسافت طی شده رونالدو $۳\frac{x}{۲}$ و جابجایی او $\frac{x}{۲}$ است. در ضمن زمان انجام کار نیز در محاسبه نسبت خواسته شده بی‌تاثیر است.



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۳\frac{x}{۲}}{\Delta t}, \quad v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{\frac{x}{۲}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_{av}}{v_{av}} = \frac{۳\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}} = ۳$$

نتیجه: نسبت تندی متوسط به اندازه سرعت متوسط همان نسبت مسافت به اندازه جابجایی است.

روش اول:



$$\begin{cases} x_A = vt + 0 \\ x_B = -3vt + d \end{cases} \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow vt = -3vt + d$$

$$\Rightarrow t = \frac{d}{4v}$$

چون حرکت متحرک A با سرعت و ثابت انجام می‌شود، فاصله OM ($\frac{3}{4}d$) را در ۱۰ ثانیه طی کرده است، فاصله NO ($\frac{d}{4}$) را در مدت $\frac{10}{3}$ ثانیه طی می‌کند؛ بنابراین:

$$\frac{d}{4v} = \frac{10}{3} \Rightarrow d = \frac{40}{3}v$$

مدت زمان طی کردن کل مسیر توسط متحرک B برابر است با:

$$s = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 3v = \frac{d}{\Delta t_B} \Rightarrow \Delta t_B = \frac{d}{3v} = \frac{\frac{40}{3}v}{3v} = \frac{40}{9} \text{ (s)}$$

روش دوم:

چون دو متحرک یک مسافت را طی می‌کنند، مدت کل حرکت آن‌ها به نسبت عکس سرعت آن‌ها است.

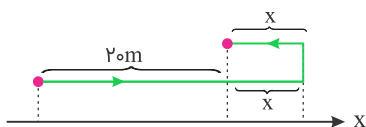
$$\Delta t_A = \Delta t_{NO} + \Delta t_{OM} = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} \text{ s}$$

$$\ell_A = \ell_B \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow \frac{\frac{40}{3}}{\Delta t_B} = \frac{3v}{v} \Rightarrow \Delta t_B = \frac{40}{9} \text{ (s)}$$

ابتدا با استفاده از سرعت متوسط و تندی متوسط، بردار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط جسم را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow +2 = \frac{\Delta x}{10} \Rightarrow \Delta x = +20 \text{ m} \\ s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 3 = \frac{\ell}{10} \Rightarrow \ell = 30 \text{ m} \end{cases}$$

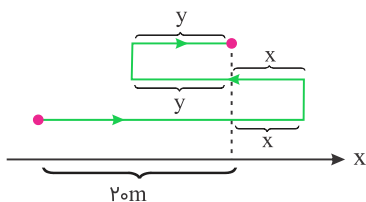
اگر متحرک یک‌بار تغییر جهت داده باشد، مسیر حرکت آن به‌صورت شکل زیر است. در این حالت، مسافت طی‌شده توسط متحرک در جهت محور برابر است با:



$$20 + 2x = 30 \Rightarrow x = 5 \text{ m}$$

$$\text{مسافت طی‌شده در جهت محور} = 20 + x = 25 \text{ m}$$

اگر متحرک ۲ بار تغییر جهت داده باشد، مسیر حرکت متحرک به‌صورت شکل زیر است. در این حالت، مسافت طی‌شده در جهت محور برابر است با:



$$20 + 2(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 5 \text{ m}$$

$$\text{مسافت طی‌شده در جهت محور} = 20 + x + y = 25 \text{ m}$$

باتوجه به دو حالت بالا و حالات دیگر به این نتیجه می‌رسیم که تعداد تغییر جهت‌ها در مسافت طی‌شده در جهت محور تأثیری ندارد و همواره مقدار مسافت طی‌شده در جهت محور x ها برابر 25 m است.

نمودار مکان- زمان به صورت یک سهمی است؛ پس حرکت با شتاب ثابت است. باتوجه به نمودار، سرعت در لحظه $t = ۴s$ صفر است؛ پس داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow ۲۴ = \frac{1}{2}a \times ۴^2 + ۴v_0 \Rightarrow ۲۴ = \lambda a + ۴v_0 \quad (۱)$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=۴s]{v=۰m/s} ۰ = ۴a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۴a \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲) \Rightarrow (۱)} ۲۴ = \lambda a - ۱۶a \Rightarrow a = -۳m/s^2 \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳) \Rightarrow (۲)} v_0 = -۴ \times -۳ = ۱۲m/s \quad (۴)$$

حال با داشتن شتاب و سرعت اولیه می‌توانیم معادله سرعت- زمان متحرک را بنویسیم:

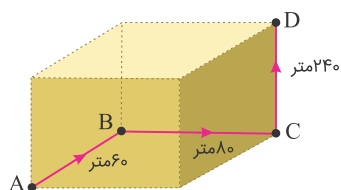
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -۳t + ۱۲$$

$$\xrightarrow[t=۶s]{} v = -۳ \times ۶ + ۱۲ = -۶m/s$$

در مرحله اول باید بدانیم که: $\text{تندی} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ و چون تندی ثابت است، پس متوسط آن همان 10 m/s است و در نتیجه با جمع کردن کل مسیر پرواز یعنی: $120 = 60 + 80 + 240 = 500 \text{ متر}$ مسافت طی شده به دست می‌آید و داریم:

$$\frac{500}{\text{زمان}} = 10 \Rightarrow 50 \text{ s} = \text{زمان حرکت}$$

برای یافتن جابه‌جایی کافی است بدانیم نهایتاً پرنده $60 = 120 - 60$ متر به سمت شمال و 80 متر به شرق و 120 متر به بالا رفته است، یعنی اضلاع یک مکعب مستطیل به صورت زیر:



$$\text{جابه‌جایی} = \sqrt{\underbrace{60^2 + 80^2}_{100^2} + 120^2} = \sqrt{100^2 + 120^2} = 160 \text{ متر}$$

$$v_{av} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{160}{50} = 3.2 \text{ m/s}$$

$$S_{av} - v_{av} = 10 - 3.2 = 6.8 \text{ m/s}$$

گام اول: لحظه‌ای که هر دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

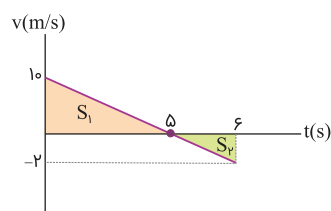
$$\begin{aligned} > x_A = x_B \Rightarrow 2t^2 + 4t = -t^2 + 10t + 72 \\ \Rightarrow 3t^2 - 6t - 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 24 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \text{ s} & \checkmark \\ t = -4 \text{ s} & \times \end{cases}$$

برای به دست آوردن مسافت طی‌شده توسط متحرک B نمودار $v - t$ آن را رسم می‌کنیم:

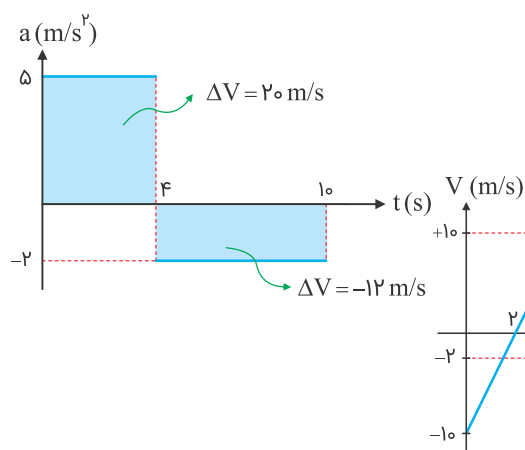
$$x_B = -t^2 + 10t + 72 \Rightarrow v_B = -2t + 10$$

$$v = 0 \Rightarrow t = 5 \text{ s}, \quad t = 6 \text{ s} \Rightarrow v = -2 \text{ m/s}$$



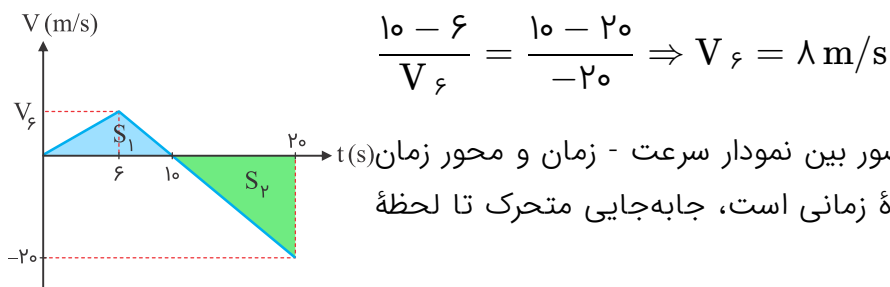
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{5 \times 10}{2} = 25 \Rightarrow \Delta x_1 = 25 \text{ m} \\ S_2 &= \frac{2 \times 1}{2} = 1 \Rightarrow \Delta x_2 = -1 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \Rightarrow l = 25 + 1 = 26 \text{ m}$$

بررسی حرکت از نمودار $v - t$ راحت‌تر است پس به کمک نمودار $a - t$ نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. مساحت زیر نمودار $a - t$ برابر با تغییرات سرعت است.



در بازه‌های $(0, 2)$ و $(4, 8)$ نمودار $v - t$ به محور افقی نزدیک می‌شود پس اندازه سرعت کم می‌شود و حرکت کندشونده است.

برای به دست آوردن بردار مکان متحرک در لحظه $t = ۲۰\text{ s}$ ، باید جابه‌جایی متحرک تا این لحظه را به دست آوریم. ابتدا با استفاده از تشابه دو مثلث که قاعده‌های آن‌ها در بازه‌های ۶ s تا ۱۰ s و ۱۰ s تا ۲۰ s قرار دارد می‌توان نوشت:



حال باتوجه به این که مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان $t(s)$ نشان‌دهنده جابه‌جایی متحرک در یک بازه زمانی است، جابه‌جایی متحرک تا لحظه $t = ۲۰\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = S_1 - S_2 = \frac{۱۰ \times ۸}{۲} - \frac{۱۰ \times ۲۰}{۲} = -۶۰ \text{ m}$$

چون مکان اولیه جسم برابر $x_0 = +۴ \text{ m}$ بوده است از رابطه $\Delta x = x_{۲۰} - x_0$ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow -۶۰ = x_{۲۰} - ۴ \Rightarrow x_{۲۰} = -۵۶ \text{ m}$$

بنابراین بردار مکان متحرک در $t = ۲۰\text{ s}$ برابر $\vec{x}_{۲۰} = (-۵۶ \text{ m})\vec{i}$ خواهد بود.

با فرض اینکه در مبدأ زمان، متحرک A در مبدأ مکان قرار داشته باشد، متحرک B در مکان $x_{0B} = 1000\text{m}$ قرار دارد؛ بنابراین معادلات مکان- زمان دو متحرک A و B در دو حالت موردنظر تست به صورت زیر خواهد شد:

حالت اول: دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می کنند.



$$x_A = v_A t$$

$$x_B = -v_B t + 1000$$

$$t = 10\text{s} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$\Rightarrow v_A \times 10 = -v_B \times 10 + 1000$$

$$\Rightarrow 10v_A + 10v_B = 1000$$

$$\Rightarrow v_A + v_B = 100 \quad (\text{I})$$

حالت دوم: دو متحرک در یک جهت حرکت می کنند.



$$x_A = v_A t$$

$$x_B = v_B t + 1000$$

$$t = 20\text{s} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$\Rightarrow v_A \times 20 = v_B \times 20 + 1000$$

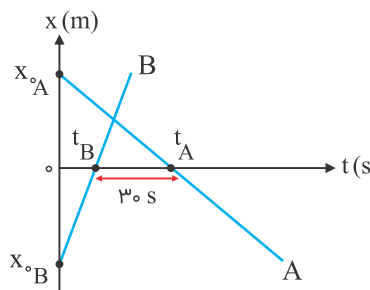
$$\Rightarrow v_A - v_B = 50 \quad (\text{II})$$

در پایان با استفاده از دو رابطه (I) و (II)، v_A و v_B را به دست می آوریم:

$$v_A = 75 \text{ m/s}$$

$$v_B = 25 \text{ m/s}$$

در حقیقت خواسته سؤال $|x_{oA}| - |x_{oB}|$ است که چون $x_{oA} > 0$ و $x_{oB} < 0$ است، کافی است $x_{oA} + x_{oB}$ را به دست بیاوریم تا به پاسخ برسیم. در ابتدا با استفاده از رابطه حرکت با سرعت ثابت، معادله حرکت دو متحرک A و B را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x_A = -v t + x_{oA} \xrightarrow{x=0 \text{ m}} 0 = -v t_A + x_{oA} \Rightarrow t_A = \frac{x_{oA}}{v} & (*) \\ x_B = v t + x_{oB} \xrightarrow{x=0 \text{ m}} 0 = v t_B + x_{oB} \Rightarrow t_B = \frac{-x_{oB}}{v} & (**) \end{cases}$$

حال با استفاده از معادله‌های (*) و (**) که در بالا به دست آمدند و باتوجه به اطلاعات داده‌شده روی نمودار داریم:

$$t_A - t_B = v_0 s \xrightarrow{(*), (**)} \frac{x_{oA}}{v} + \frac{x_{oB}}{v} = v_0 \Rightarrow x_{oA} + x_{oB} = v_0 m$$

باتوجه به اینکه مساحت بین منحنی شتاب- زمان با محور t برابر با Δv است، داریم:

$$(0, 5s) \text{ بازه زمانی } : \Delta v_1 = 4 \times 5 = 20 \text{ m/s} \Rightarrow v_1 - v_0 = 20$$

$$v_1 - (-8) = 20 \Rightarrow v_1 = 12 \text{ m/s}$$

$$(5s, 7s) \text{ بازه زمانی } : \Delta v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 12 \text{ m/s}$$

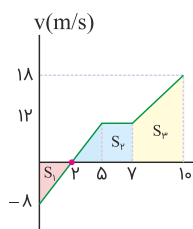
$$(7s, 10s) \text{ بازه زمانی } : \Delta v_3 = 2 \times 3 = 6 \text{ m/s}$$

$$v_3 - v_2 = 6 \Rightarrow v_3 - 12 = 6 \Rightarrow v_3 = 18 \text{ m/s}$$

همچنین لحظه t که در آن سرعت متحرک صفر می شود را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \Delta v_{(t,0)} = v_t - v_0 = 0 - (-8) = 8 \\ \text{لحظه صفر شدن سرعت متحرک : } \Delta v_{(t,0)} = 4 \times t \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2s \end{cases}$$

حالا نمودار $v - t$ حرکت را رسم می کنیم:



مساحت های S_1 ، S_2 و S_3 را به دست می آوریم:

$$S_1 = \frac{2 \times 8}{2} = 8 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = -8 \text{ m}$$

$$S_2 = \frac{5 + 2}{2} \times 12 = 42 \Rightarrow \Delta x_2 = 42 \text{ m}$$

$$S_3 = \frac{12 + 18}{2} \times 3 = 45 \Rightarrow \Delta x_3 = 45 \text{ m}$$

حالا تندی متوسط را به دست می آوریم:

$$S_{av} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|}{\Delta t} = \frac{8 + 42 + 45}{10} = 9.5 \text{ m/s}$$

باتوجه به نمودار، متحرک در $t = ۴ \text{ s}$ تغییر جهت داده است. مکان این لحظه را x_{fs} در نظر می‌گیریم. باتوجه به نمودار تندی متوسط در بازه $(۰, ۸ \text{ s})$ و اندازه سرعت متوسط در بازه $(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})$ برابر است با:

$$\begin{cases} S_{av}(0, 8 \text{ s}) = \frac{|x_{fs} - ۲| + |۴ - x_{fs}|}{8} \xrightarrow{x_{fs} < 0} S_{av} = \frac{۲ - x_{fs} + ۴ - x_{fs}}{8} = \frac{۶ - ۲x_{fs}}{8} \\ |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| = \frac{|0 - x_{fs}|}{۲} \xrightarrow{x_{fs} < 0} |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| = \frac{-x_{fs}}{۲} \end{cases}$$

باتوجه به گفته سؤال، اختلاف دو مقدار به دست آمده را برابر $۰/۲۵ \text{ m/s}$ قرار می‌دهیم تا x_{fs} به دست بیاید

$$\begin{aligned} S_{av}(0, 8 \text{ s}) - |v_{av}(۴ \text{ s}, ۶ \text{ s})| &= ۰/۲۵ \\ \Rightarrow \frac{۶ - ۲x_{fs}}{8} - \frac{-x_{fs}}{۲} &= \frac{۱}{۴} \\ \Rightarrow ۳ - x_{fs} + ۲x_{fs} &= ۱ \Rightarrow x_{fs} = -۲ \text{ m} \end{aligned}$$

بنابراین متحرک در مکان $x_{fs} = -۲ \text{ m}$ تغییر جهت داده است و بردار مکان آن به صورت $\vec{x} = (-۲ \text{ m})\vec{i}$ است.

سرعت اولیه دو متحرک برابر با صفر است و در $t = ۳ \text{ s}$ در یک مکان قرار دارند؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{۲} a_B t^۲ + v_{0B} t + x_{0B} \xrightarrow[v_{0B}=0]{v_{0B}=0} ۲۷ = \frac{1}{۲} a_B \times ۹ \Rightarrow a_B = ۶ \text{ m/s}^۲ \\ x_A &= \frac{1}{۲} a_A t^۲ + v_{0A} t + x_{0A} \xrightarrow[x_{0A}=-۹]{v_{0A}=0} ۲۷ = \frac{1}{۲} a_A \times ۹ - ۹ \Rightarrow a_A = ۸ \text{ m/s}^۲ \end{aligned}$$

اکنون مکان دو متحرک را در لحظه $t = ۸ \text{ s}$ می‌یابیم:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{۲} \times ۶ \times ۶۴ = ۱۹۲ \text{ m} \\ x_A &= \frac{1}{۲} \times ۸ \times ۶۴ - ۹ = ۲۴۷ \text{ m} \\ \Rightarrow |\Delta x| &= ۲۴۷ - ۱۹۲ = ۵۵ \text{ m} \end{aligned}$$

باتوجه به تقارن سهمی و اینکه متحرک در لحظه ۰ و ۱۰ ثانیه در یک مکان قرار گرفته، پس در $t = ۵s$ سرعت متحرک صفر است؛ پس با استفاده از معادله مکان- زمان و سرعت- زمان ابتدا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=۵s]{v=۰ \text{ m/s}} ۰ = ۵a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۵a$$

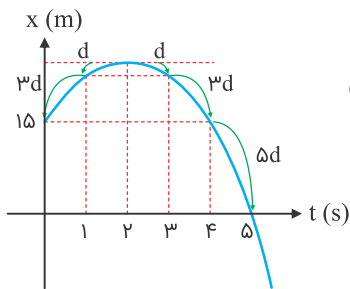
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow ۳۶ = \frac{1}{2}a(۵)^2 + (-۵a) \times ۵ + ۲۳/۵$$

$$\Rightarrow ۱۲/۵ = ۱۲/۵a - ۲۵a \Rightarrow a = \frac{-۱۲/۵}{۱۲/۵} = -۱ \text{ m/s}^2$$

اکنون با استفاده از معادله مستقل از زمان (سرعت- جابه‌جایی) داریم:

$$v^2 - v_0^2 = ۲a\Delta x \Rightarrow v^2 - ۰^2 = ۲ \times -۱ - ۳۶ \Rightarrow v^2 = ۲ \times ۳۶ = ۶\sqrt{۲} \text{ m/s}$$

در رأس سهمی سرعت متحرک صفر است. پس می‌توان از تصاعد $d, ۳d, ۵d, \dots$ استفاده کرد.



$$۵d = ۱۵ \Rightarrow d = ۳ \Rightarrow d + ۳d + ۵d = ۹d = ۲۷ \text{ m}$$

نمودار مکان - زمان متحرک به شکل سهمی است. پس حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود و همان‌طور که مشخص است، شیب خط مماس بر نمودار در مکان $x = ۴ \text{ m}$ که نشانگر سرعت لحظه‌ای متحرک است، برابر صفر است. بنابراین با استفاده از معادله مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت بین دو مکان ۴ m و -۶ m داریم: (دقت کنید که شیب خط مماس بر نمودار در مکان -۶ m منفی است، بنابراین سرعت برابر -۱۰ m/s خواهد بود.)

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_2 = -10 \text{ m/s}, v_1 = 0 \text{ m/s}} (-10)^2 - (0)^2 = 2a \times (-10)$$

$$\Rightarrow a = \frac{100}{-20} = -5 \text{ m/s}^2$$

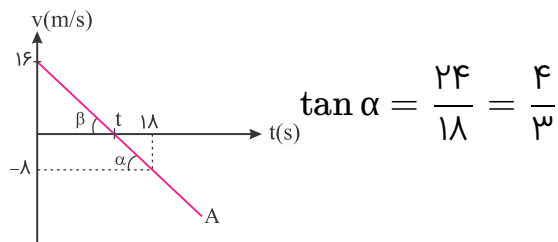
حال با توجه به این که سرعت اولیه متحرک را می‌خواهیم، مجدداً از معادله مستقل از زمان، اما این بار بین دو مکان ۴ m و 0 m استفاده می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v = 0 \text{ m/s}, v_0 = ?} (0)^2 - v_0^2 = 2(-5)(4) \Rightarrow -v_0^2 = -40$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} v_0 = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

تذکر: دقت کنید شیب خط مماس بر نمودار در $t = 0$ مثبت است؛ یعنی سرعت اولیه متحرک مثبت است.

اگر تنها به نمودار متحرک A نگاه کنیم؛ اندازه شتاب متحرک A:

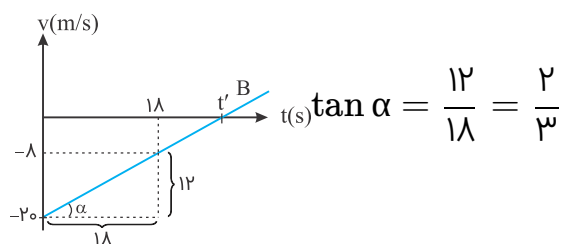


باتوجه به ثابت بودن شیب نمودار متحرک A، لحظه t برابر است با:

$$\tan \beta = \frac{16}{t} \xrightarrow{\alpha=\beta} \frac{16}{t} = \frac{4}{3} \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

حال نمودار متحرک B را به طور مجزا بررسی می‌کنیم:

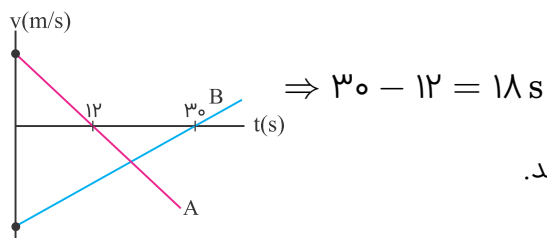
باتوجه به نمودار، شیب نمودار متحرک B را محاسبه می‌کنیم:



پس باتوجه به شیب به دست آمده، لحظه t' را به دست می‌آوریم:

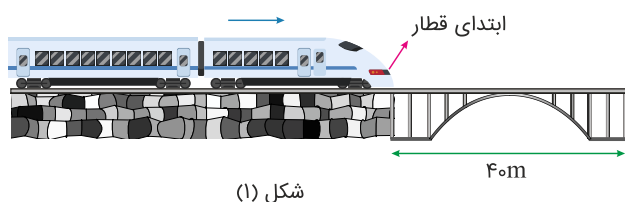
$$\tan \alpha = \frac{2}{3} = \frac{20}{t'} \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

در نهایت دو نمودار را ترکیب می‌کنیم:

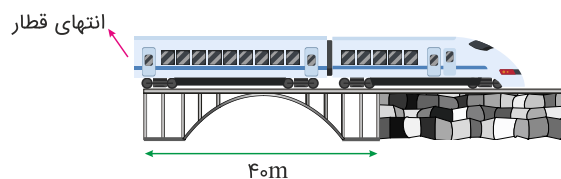


پس ۱۸ s پس از تغییر جهت متحرک A، متحرک B تغییر جهت می‌دهد.

گام اول: در دو بازه زمانی، پل به طور کامل از قطار اشغال نمی‌شود؛ بازه زمانی اول (Δt_{in})، مدت زمانی است که در آن ابتدای قطار از انتهای پل به ابتدای پل می‌رود (شکل ۱) و بازه زمانی دوم (Δt_{out}) مدت زمانی است که در آن انتهای قطار از ابتدای پل به انتهای پل می‌رود (شکل ۲).



شکل (۱)



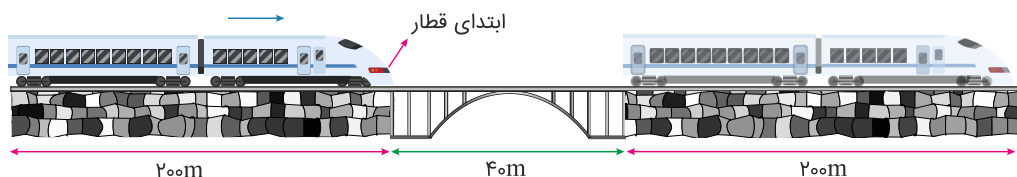
شکل (۲)

چون قطار با سرعت ثابت از روی پل عبور می‌کند، داریم:

$$\text{شکل (۱): } \Delta x = v \Delta t \Rightarrow 40 = 20 \times \Delta t_{in} \Rightarrow \Delta t_{in} = 2s$$

$$\text{شکل (۲): } \Delta x = v \Delta t \Rightarrow 40 = 20 \times \Delta t_{out} \Rightarrow \Delta t_{out} = 2s$$

گام دوم: حالا با توجه به شکل (۳) مدت زمان لازم برای عبور کامل قطار از روی پل را به دست می‌آوریم؛ یعنی فاصله زمانی بین لحظه ورود ابتدای قطار به ابتدای پل و لحظه خروج انتهای قطار از انتهای پل:



شکل (۳)

$$\begin{aligned} \Delta x &= v \Delta t \Rightarrow d_{\text{پل}} + d_{\text{قطار}} = v \Delta t \\ \Rightarrow 40 + 200 &= 20 \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{240}{20} = 12s \end{aligned}$$

گام سوم: در پایان مدت زمانی که پل به طور کامل از قطار پر شده است را به دست می‌آوریم که برابر است با:

$$\Delta t' = \Delta t - \Delta t_{in} - \Delta t_{out} = 12 - 2 - 2 = 8s$$

می‌دانیم در لحظه $t = 2s$ سرعت متحرک برابر با صفر است. در نتیجه به علت تقارن روی شکل سهم، تندی متحرک در لحظه $t = 4s$ برابر با همان تندی اولیه متحرک است.

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t \quad \text{۲ ثانیه اول}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{0 + v_0}{2} \times 2 \Rightarrow v_0 = 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_{t=4} = 8 \text{ m/s}$$

ابتدا به کمک معادله جابه‌جایی- زمان، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4^2 + v_0 \times 4 \Rightarrow v_0 = -2 \text{ m/s}$$

حال معادله سرعت- زمان متحرک را می‌نویسیم و لحظه تغییر جهت حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 3t - 2 \xrightarrow{v=0} t = \frac{2}{3} \text{ s}$$

پس در ابتدا سرعت منفی و شتاب مثبت بوده و حرکت کندشونده است. در لحظه $t = \frac{2}{3} \text{ s}$ متحرک تغییر جهت می‌دهد و بعد از $t = \frac{2}{3} \text{ s}$ سرعت متحرک مثبت شده و به صورت تندشونده به مسیرش ادامه می‌دهد.

گام اول: با فرض اینکه t_1 لحظه‌ای باشد که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند و t_2 لحظه‌ای باشد که متحرک B، به مقدار $3/5 \text{ m/s}$ بر سرعت خود بیفزاید. باتوجه به شکل زیر، داریم:

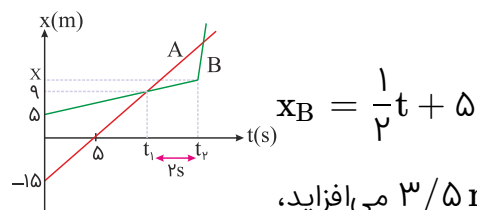
معادله مکان-زمان متحرک A:

$$x_A = 3t - 15 \Rightarrow 9 = 3t_1 - 15 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

$$t_2 = t_1 + 2 = 8 + 2 = 10 \text{ s} \Rightarrow x_B = v_B t + 5 \Rightarrow 9 = v_B t_1 + 5$$

$$\Rightarrow 9 = v_B \times 8 + 5 \Rightarrow v_B = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

معادله مکان-زمان متحرک B:



گام دوم: از لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ به بعد، متحرک B بر سرعت خود به مقدار $3/5 \text{ m/s}$ می‌افزاید، بنابراین:

$$v'_B = v_B + 3/5 = 0/5 + 3/5 = 4/5 \text{ m/s}$$

و از طرفی مکان متحرک B، در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر است با:

$$x_B = \frac{1}{2}t + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 10 + 5 = 10 \text{ m}$$

درنتیجه معادله مکان-زمان متحرک B بعد از لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ به صورت زیر خواهد شد:

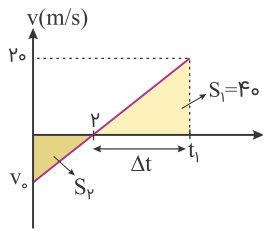
$$x'_B = v'_B t + x'_B \Rightarrow v'_B = 4t - 30$$

گام سوم: در پایان، لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند را به دست می‌آوریم:

$$x'_B = x_A \Rightarrow 4t - 30 = 3t - 15 \Rightarrow t = 15 \text{ s}$$

چون نقاط ابتدا به هم نزدیک و سپس دور می‌شوند؛ بنابراین سرعت متحرک از یک مقدار زیاد ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود، یعنی شیب نمودار مکان-زمان ابتدا زیاد بوده و سپس کم شده و دوباره زیاد می‌شود؛ یعنی گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. شیب نمودار همان سرعت است.



$$40 = \frac{v_0 \times \Delta t}{2} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 4 + 2 = 6 \text{ s}$$

$$a = \tan \alpha = \frac{v_0}{4} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{از تشابه دو مثلث} : \frac{|v_0|}{2} = \frac{v_0}{4} \Rightarrow v_0 = -10 \text{ m/s}$$

$$S_2 = \frac{2 \times (-10)}{2} = -10 \Rightarrow 0 < t < 2 \Rightarrow \Delta x = -10 \Rightarrow -40 - x_0 = -10 \Rightarrow x_0 = -30$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 = 2.5 t^2 - 10 t - 30$$